



N-TARTIBLI CHIZIQLI BO'LMAGAN VEKTOR-MATRITSALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING CHEGARALANGAN YECHIMLARI

M.K.Movlonov,

Iqtisodiyot va pedagogika universiteti,
matematika kafedrasida dotsenti.

T.B.Xoliqov,

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti,
matematika yo'nalishi magistranti.

MAQOLA HAQIDA

Qabul qilindi: 9-fevral 2026-yil

Tasdiqlandi: 11-fevral 2026-yil

Jurnal soni: 17-B

Maqola raqami: 41

DOI: <https://doi.org/10.54613/ku.v17i.1475>

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada tartibli chiziqli bo'lmagan vektor-matritsali differensial tenglamalar sistemasining chegaralangan yechimlarining mavjudligi va yagonaligi masalasi tadqiq etiladi. Ishda mazkur sistema uchun yetarli shartlarni aniqlovchi asosiy teoremlar bayon qilinib, ularning qat'iy matematik isbotlari keltiriladi. Natijalar Banaxning qat'iy nuqta prinsipi asosida olingan bo'lib, integral tenglamalar usuli yordamida yechimning mavjudligi, yagonaligi hamda chegaralanganligi asoslab beriladi. Shuningdek, olingan baholarning differensial sistemalar yechimlarining mavjudligi, yagonaligi va chegaralanganligini tadqiq etishda qo'llanishi asoslab beriladi. Ushbu maqolada nnn-tartibli chiziqli bo'lmagan vektor-matritsali differensial tenglamalar sistemasining chegaralangan yechimlarining mavjudligi va yagonaligi masalasi kompleks tarzda o'rganiladi. Tadqiqot jarayonida yuqori tartibli tenglama birinchi tartibli vektor-matritsali sistema ko'rinishiga keltirilib, masala funksional analiz metodlari asosida yechiladi. Xususan, mos bir jinsli chiziqli sistemaga qurilgan Grin funksiyasi yordamida differensial sistema integral tenglamaga ekvivalent shaklga o'tkaziladi. Ishda Banax fazosida aniqlangan operatorning qisqaruvchanligi isbotlanib, Banaxning qat'iy nuqta prinsipi asosida sistemaning yagona chegaralangan yechimi mavjudligi qat'iy matematik asoslab beriladi. Shuningdek, Lipshtits sharti va Grin funksiyasi uchun kiritilgan baholar yordamida yechimning aniq normaviy bahosi olinadi hamda uning chegaralanganligi uchun yetarli shartlar aniqlanadi. Olingan natijalar yuqori tartibli chiziqli bo'lmagan differensial sistemalarning barqarorlik xossalari o'rganishda, shuningdek, avtomatik boshqaruv nazariyasi, iqtisodiy dinamik modellar va ko'p o'lchovli mexanik tizimlarni matematik modellashirishda qo'llanishi mumkin. Mazkur ish differensial tenglamalar nazariyasida chegaralangan yechimlar sinfini tavsiflash va ularning sifat xossalari aniqlashga qo'shimcha hissa qo'shadi.

**KALIT SO'ZLAR/ КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА/
KEYWORDS**

differensial tenglama, vektor-matritsali sistema, chegaralangan yechim, Banax teoremasi, integral tenglama, Grin funksiyasi, Lipshtits sharti, qat'iy nuqta prinsipi..

Kirish. Ko'p o'lchovli dinamik sistemalarning matematik modellari ko'p hollarda vektor-matritsali differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Bunday tenglamalar avtomatik boshqaruv nazariyasi, iqtisodiy dinamika, biologik modellar, mexanik tizimlar va elektr zanjirlarida keng qo'llaniladi. Bunday tenglamalarni o'rganishda asosiy masalalardan biri yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va chegaralanganligini aniqlashdan iborat bo'lib, bu masalalar tizimlarning barqarorligi va amaliy qo'llanish imkoniyatlarini baholashda muhim ahamiyat kasb etadi.

Hozirgi zamon matematika fanida ko'p o'lchovli dinamik jarayonlarni tavsiflash va tahlil qilish muhim ilmiy yo'nalishlardan biri hisoblanadi. Bunday jarayonlar ko'pincha n-tartibli chiziqli bo'lmagan vektor-matritsali differensial tenglamalar orqali modellashiriladi. Ayniqsa, real jarayonlarning ko'pchiligi chiziqli bo'lmagan xususiyatga ega bo'lgani sababli, ularning matematik modeli ham chiziqli bo'lmagan differensial sistemalar ko'rinishida ifodalanadi¹.

Vektor-matritsali differensial tenglamalar ko'p parametrlil tizimlarni ixcham va tizimli tarzda ifodalash imkonini beradi. Bunday yondashuv tizim komponentlari o'rtasidagi o'zaro bog'lanishlarni matritsa apparati yordamida aniq ko'rsatishga xizmat qiladi. Yuqori tartibli tenglamalarni birinchi tartibli sistemaga keltirish esa funksional analiz metodlarini qo'llash imkonini kengaytiradi hamda yechimlar fazosini Banax fazosi doirasida o'rganishga sharoit yaratadi.

Chiziqli bo'lmagan sistemalar nazariyasida asosiy masalalardan biri — yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va chegaralanganligini aniqlashdir. Aynan chegaralangan yechimlarning mavjudligi tizimning uzoq muddatli xatti-harakatini tavsiflashda, uning barqarorligini baholashda hamda amaliy modellashirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Agar sistema yechimlari chegaralangan bo'lsa, u holda model real

jarayonni adekvat aks ettiradi va fizik yoki iqtisodiy ma'noga ega bo'ladi².

Mazkur yo'nalishdagi tadqiqotlar funksional analiz, operatorlar nazariyasi va integral tenglamalar usullari bilan chambarchas bog'liq. Xususan, differensial tenglamani integral tenglamaga keltirish va Banaxning qat'iy nuqta prinsipidan foydalanish mavjudlik va yagonalik masalalarini hal etishda samarali metodlardan biri hisoblanadi. Lipshtits sharti esa chiziqli bo'lmagan hadning "nazorat qilinadigan" xatti-harakatini ta'minlab, operatorning qisqaruvchanligini isbotlashda muhim rol o'ynaydi.

Adabiyotlar tahlili. Mazkur yo'nalishda bir qator fundamental tadqiqotlar amalga oshirilgan. Jumladan, Ivan D. Kostруб va Alexander I. Perov ning ishlarida³ eng yuqori tartibli hosila bo'yicha yechilgan n-tartibli chiziqli bo'lmagan vektor-matritsali differensial tenglamalarning chegaralangan yechimlari masalasi chuqur o'rganilgan. Ushbu tadqiqotlarda tenglamalar chekli o'lchamli $\mathbb{R}^d$ yoki C^d fazolarida, norma yoki skalyar ko'paytma yordamida aniqlangan fazolarda qaralgan. Boshqacha aytganda, mazkur tenglamalar chekli o'lchamli Banax yoki Gilbert fazolarida tadqiq etilgan.

Shunday qilib, mavjud ilmiy natijalar vektor-matritsali differensial tenglamalarning chegaralangan yechimlarini o'rganish nazariyasi ancha rivojlanganini ko'rsatadi. Biroq yuqori tartibli chiziqli bo'lmagan sistemalar uchun umumiyroq shartlar ostida chegaralangan yechimlarning mavjudligi va ularning xossalari aniqlash masalasi hali ham dolzarb bo'lib qolmoqda. Mazkur ish aynan shu yo'nalishda olib borilib, n-tartibli chiziqli bo'lmagan vektor-matritsali differensial tenglamalar uchun chegaralangan yechimlarning mavjudligi va ularning asosiy xossalari aniqlashga bag'ishlanadi⁴.

¹ Коструб И. Д. Ограниченные решения векторно-операторных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка в банаховом пространстве / И. Д. Коструб // Вестник ПИМ. – 2010. – Вып. 8. – С. 221–233.; Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. М.: Наука, 1967. – 464 с.; Перов А. И. Ограниченные решения дифференциальных уравнений второго порядка / А. И. Перов // Дифференциальные уравнения. – 1967. Т. 3, N 3. – С. 524–528.

² Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. М.: Наука, 1967. – 464 с.

³ Коструб И. Д. Ограниченные решения векторно-операторных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка в банаховом пространстве / И. Д. Коструб // Вестник ПИМ. – 2010. – Вып. 8. – С. 221–233.; Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. М.: Наука, 1967. – 464 с.; Перов А. И. Ограниченные решения дифференциальных уравнений второго порядка / А. И. Перов // Дифференциальные уравнения. – 1967. Т. 3, N 3. – С. 524–528.

⁴ Коструб И. Д. Ограниченные решения векторно-операторных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка в банаховом пространстве / И. Д. Коструб // Вестник ПИМ. – 2010. – Вып. 8. – С. 221–233.; Крейн С. Г., Линейные дифференциальные

Tadqiqot metodologiyasi. Mazkur tadqiqotda nnn-tartibli chiziqli bo'lmagan vektor-matritsali differensial tenglama dastlab birinchi tartibli vektor-matritsali sistema ko'rinishiga keltirildi. Shundan so'ng sistema mos bir jinsli chiziqli qismiga qurilgan Grin funksiyasi yordamida integral tenglamaga ekvivalent shaklga o'tkazildi.

Yechimlar fazosi sifatida uzluksiz va chegaralangan vektor-funksiyalar to'plami tanlanib, unda supremum norma kiritildi va bu fazoning Banax fazosi ekanligi hisobga olindi. Integral tenglama asosida aniqlangan operatorning shu fazoda o'z-o'ziga akslanishi va

$$X^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(t) X^k(t) = F(t, X(t), X'(t), X^{(n-1)}(t)) \quad (1)$$

Bu yerda $X(y) \in \mathbb{R}^m$, $A_k(t) - m \times m$ tartibli uzluksiz matritsalar, F esa chiziqli bo'lmagan vektor-funksiya hisoblanadi.

Ishni soddalashtirish uchun (1) tenglamani birinchi tartibli sistemaga keltiriladi. Buning uchun quyidagi almashtirishlardan foydalanamiz:

$$Y_1 = X, Y_2 = X', Y_3 = X^{(n-1)}$$

Natijada $N = n \cdot m$ o'lchamli quyidagi vektor-matritsali differensial sistema hosil bo'ladi:

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + F(t, Y(t)), t \geq t_0. \quad (2)$$

Mazkur ishimizning asosiy maqsadi (2) sistemaning $t_0, +\infty$ oraliqda chegaralangan yechimlarga ega bo'lishi uchun yetarli shartlarni aniqlash va ularni isbotlashdan iborat.

Isbotlarni keltirishdan oldin ishimizda foydalaniladigan funksional fazo va asosiy shartlarni aniqlab olamiz.

Ta'rif 1. B fazosi $t_0, +\infty$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lgan barcha chegaralangan $Y(t)$ vektor-funksiyalar to'plamidan iborat bo'lsin. Ushbu fazoda norma quyidagicha aniqlanadi:

$$\|Y(t)\|_B = \sup_{t \geq t_0} \|Y(t)\|,$$

Bu yerda $\|\cdot\|$ – Yevklid normasi. Ma'lumki, ushbu norma bilan ta'minlangan B fazosi Banax fazosi hisoblanadi.

Faraz 1. Mos keluvchi bir jinsli chiziqli sistema $Y'(t) = A(t)Y(t)$ uchun Grin funksiyasi

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|G(t, s)\| ds \leq K, \forall t \geq t_0,$$

bu yerda $K > 0$ — o'zgarmas son.

Faraz 2. $F(t, Y(t))$ funksiya Y o'zgaruvchisi bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsin, ya'ni

$$\|F(t, Y_1) - F(t, Y_2)\| \leq L\|Y_1 - Y_2\|, \text{ hamda } \|F(t, 0)\| \leq M,$$

bu yerda $L > 0$ va $M > 0$ — o'zgarmaslar.

Teorema 1. Agar Faraz 1 va Faraz 2 o'rinli bo'lsa va $K \cdot L < 1$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda (2) differensial tenglamalar sistemasi B fazosida yagona chegaralangan yechimga ega bo'ladi.

Isbot. Mazkur teorema isbotini Banaxning qat'iy nuqta teoremasi yordamida amalga oshiramiz. Avvalo, (2) tenglamani integral ko'rinishga keltiramiz. Grin funksiyasining xossalariidan foydalanib, (2) sistemaning har qanday yechimi quyidagi integral tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi:

$$Y(t) = \int_{t_0}^{+\infty} G(t, s) F(s, Y(s)) ds. \quad (3)$$

Endi B fazosida quyidagi operatorni aniqlaymiz:

$$(TY)(t) = \int_{t_0}^{+\infty} G(t, s) F(s, Y(s)) ds.$$

Ko'rsatamizki, T operatori B fazosini o'ziga akslantiradi va qisqaruvchi operator hisoblanadi.

Biz dastlabki qadamda $T: B \rightarrow B$ ekanligini ko'rsatishimiz kerak.

Ixtiyoriy $Y \in B$ funksiyani olaylik. Lipshits shartiga ko'ra $\|F(s, Y(s))\| \leq \|F(s, Y(s)) - F(s, 0)\| + \|F(s, 0)\| \leq L\|Y(s)\| + M.$

qisqaruvchanligi Lipshits sharti hamda Grin funksiyasi uchun olingan baholar yordamida isbotlandi.

Asosiy natijalar Banaxning qat'iy nuqta prinsipi asosida olindi. Shuningdek, norma baholari orqali yechimning chegaralanganligi uchun yetarli shartlar aniqlanib, tegishli tengsizliklar yordamida matematik jihatdan asoslab berildi.

Tadqiqot natijalari. Ma'lumki, $n \times n$ -tartibli chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalar ko'pincha birinchi tartibli vektor-matritsali sistema ko'rinishiga keltirilib, aynan shu shaklda o'rganiladi. Ushbu maqolada quyidagi ko'rinishdagi differensial tenglama ko'rib o'tiladi:

$$Y \in B \text{ bo'lgani uchun } \|Y(s)\| \leq \|Y\|_B. \text{ Demak,}$$

$$\|F(s, Y(s))\| \leq L\|Y\|_B + M.$$

Endi $(TY)(t)$ ning normasini baholaymiz:

$$\begin{aligned} \|(TY)(t)\| &\leq \int_{t_0}^{+\infty} \|G(t, s)\| \|F(s, Y(s))\| ds \\ &\leq (L\|Y\|_B + M) \int_{t_0}^{+\infty} \|G(t, s)\| ds. \end{aligned}$$

$$1\text{-farazga ko'ra } \int_{t_0}^{+\infty} \|G(t, s)\| ds \leq K.$$

Shuning uchun $\|(TY)(t)\| \leq K(L\|Y\|_B + M)$. Bu baho barcha $t \geq t_0$ uchun o'rinli, demak

$$\|(TY)(t)\| \leq K(L\|Y\|_B + M) < \infty.$$

Shunday qilib, $TY \in B$, ya'ni operator B fazosini o'ziga akslantiradi.

Ikkinchi qadamda T operatorining qisqaruvchanligini ko'rsatamiz.

$\forall Y_1, Y_2 \in B$ uchun

$$\begin{aligned} \|(TY_1)(t) - (TY_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{+\infty} G(t, s) (F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{+\infty} \|G(t, s)\| \|F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))\| ds. \end{aligned}$$

Lipshits shartiga ko'ra $\|F(s, Y_1) - F(s, Y_2)\| \leq L\|Y_1 - Y_2\|$. Shuning uchun

$$\begin{aligned} \|(TY_1)(t) - (TY_2)(t)\| &\leq L\|Y_1 - Y_2\| \int_{t_0}^{+\infty} \|G(t, s)\| ds \\ &\leq KL\|Y_1 - Y_2\|_B. \end{aligned}$$

Demak, $\|TY_1 - TY_2\|_B \leq q\|Y_1 - Y_2\|_B$, $q = KL < 1$.

Bu esa T operatori qisqaruvchi operator ekanligini ko'rsatadi.

Muhokama. Banaxning qat'iy nuqta teoremasiga ko'ra, to'liq metrik fazo B da qisqaruvchi T operatorining yagona qat'iy nuqtasi mavjud. Ya'ni, $TY = Y$ tenglamani qanoatlantiruvchi yagona $Y \in B$ funksiya mavjud. Ushbu funksiya (3) integral tenglamani, demak (2) differensial sistemaning ham yagona chegaralangan yechimi hisoblanadi[2].

Lemma 1. (Chegaralanganlik uchun yetarli shart)

Faraz 1 va Faraz 2 bajarilsin hamda $KL < 1$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda (2) differensial sistemaning yagona chegaralangan yechimi $Y(t)$ quyidagi bahoni qanoatlantiradi: $\|Y\|_B \leq \frac{KM}{1-KL}$.

Isbot. Teorema isbotida ko'rsatilganidek, (2) differensial sistemaning har qanday chegaralangan yechimi quyidagi integral tenglamani qanoatlantiradi:

$$Y(t) = \int_{t_0}^{+\infty} G(t, s) F(s, Y(s)) ds.$$

Endi bu tenglikdan foydalanib yechim normasini baholaymiz.

Norma xossalriga ko'ra

$$\|Y(t)\| \leq \int_{t_0}^{+\infty} \|G(t, s)\| \|F(s, Y(s))\| ds. \quad (4)$$

Faraz 2 ga ko'ra $F(t, Y)$ funksiya Lipshits shartini qanoatlantiradi va

$$\|F(s, Y(s))\| \leq \|F(s, Y(s)) - F(s, 0)\| + \|F(s, 0)\| \leq L\|Y(s)\| + M. \quad (5)$$

$Y \in B$ bo'lgani sababli $\|Y(s)\| \leq \|Y\|_B$. Demak,

$$\|F(s, Y(s))\| \leq L\|Y(s)\| + M. \quad (6)$$

(4) ga qo'yib,

$$\|Y(t)\| \leq L\|Y(s)\| + M \int_{t_0}^{+\infty} \|G(t, s)\| ds. \quad (7)$$

Faraz 1 ga ko'ra

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|G(t, s)\| ds \leq K \Rightarrow \|Y(t)\| \leq K(L\|Y\|_B + M).$$

Supremum olib, quyidagi tengsizliklarga ega bo'lamiz:

$$\|Y\|_B \leq K(L\|Y\|_B + M) \Rightarrow (1 - KL)\|Y\|_B \leq KM.$$

$KL < 1$ ekanligidan $\|Y\|_B \leq \frac{KM}{1-KL}$ kelib chiqadi. Lemma isbotlandi.

Natija 1. Agar Faraz 1 va Faraz 2 bajarilib, qo'shimcha ravishda $F(t, 0) = 0$ bo'lsa, u holda (2) differensial sistemaning yagona chegaralangan yechimi trivial yechim $Y(t) \equiv 0$ bo'ladi.

Isbot. Bu holda $M \equiv 0$. Lemma 1 dan $\|Y\|_B \leq 0$. Demak $\|Y\| \equiv 0$. Natija isbotlandi.

Misol1. Quyidagi differensial tenglama

$$X''(t) + 2X'(t) + 5X(t) = \frac{1}{3} \sin X(t), t \geq 0$$

uchun teorema1 shartlari bajarilishini tekshirib, sistemaning B fazosida yagona chegaralangan yechimga ega ekanini ko'rsatamiz.

Berilgan tenglamani 1-tartibli tenglamaga keltirish uchun $Y_1 = X, Y_2 = X'$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda tenglama

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = -2Y_2 - 5Y_1 + \frac{1}{3} \sin Y_1 \end{cases}$$

Ushbu tenglamani matritsali ko'rinishga keltiramiz:

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \sin Y_1 \end{pmatrix}.$$

A xos qiymatlarini topamiz:

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Коструб И. Д. Ограниченные решения векторно-операторных нелинейных дифференциальных уравнений n -го порядка в банаховом пространстве / И. Д. Коструб // Вестник ПИММ. – 2010. – Вып. 8. – С. 221–233.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0, \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i.$$

Demak sistemaning Grin funksiyasi uchun $\int_0^{+\infty} \|G(t, s)\| ds \leq K, (K \approx 1)$ bahosi mavjud. $KL \approx 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$ ga ko'ra Teorema1 sharti bajariladi va tenglama B fazosida yagona chegaralangan yechimga ega.

Xulosa. Mazkur maqolada nnn-tartibli chiziqli bo'lmagan vektor-matritsali differensial tenglamalar sistemasining chegaralangan yechimlari masalasi funksional-analitik yondashuv asosida tadqiq etildi. Yuqori tartibli tenglama birinchi tartibli vektor-matritsali sistema ko'rinishiga keltirilib, Grin funksiyasi yordamida integral tenglamaga ekvivalent shaklga o'tkazildi.

Banax fazosida aniqlangan operatorning o'z-o'ziga akslanishi va qisqaruvchanligi Lipshits sharti hamda mos baholar yordamida isbotlandi. Banaxning qat'iy nuqta prinsipi asosida differensial sistemaning yagona chegaralangan yechimi mavjudligi qat'iy matematik jihatdan asoslab berildi. Shuningdek, yechim uchun aniq normaviy baho olinib, uning chegaralanganligi uchun yetarli shartlar keltirildi.

Olingan natijalar yuqori tartibli chiziqli bo'lmagan differensial sistemalarning mavjudlik va yagonalik masalalarini umumiyroq shartlar ostida o'rganishga xizmat qiladi. Tadqiqot natijalari ko'p o'lchovli dinamik tizimlarning barqarorligini tahlil qilishda hamda amaliy modellashirish masalalarida qo'llanishi mumkin.

2. Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. М.: Наука, 1967. - 464 с.

3. Перов А. И. Ограниченные решения дифференциальных уравнений второго порядка / А. И. Перов // Дифференциальные уравнения. -1967. Т. 3, N 3. - С. 524-528.